SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA
Anno Accademico 1997-98

Bruno Franchi

DISUGUAGLIANZE ISOPERIMETRICHE ASSOCIATE A UNA FAMIGLIA DI CAMPI VETTORIALI

19 marzo 1998

Tecnoprint - Bologna 1998

Riassunto. In questo seminario presentiamo alcuni risultati ottenuti recentemente in collaborazione con P. Hajłasz in cui stabiliamo una classe di disuguaglianze di Sobolev ottimali associate a una famiglia di campi vettoriali lipschiziani paralleli agli assi coordinati.

Abstract. In this seminar we illustrate some recent joint results with P. Hajłasz where we establish suitable sharp Sobolev inequalities associated with a family of Lipschitz continuous vector fields of the form $\lambda_j \partial_j$.

In questo seminario intendiamo presentare alcuni risultati (parzialmente incompleti) ottenuti in collaborazione con P. Hajłasz.

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ funzioni nonnegative e localmente Lipschitziane in un aperto di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$(*) \qquad \partial_j \lambda_j \equiv 0 \qquad \text{per } j = 1, \dots, n.$$

Ricordiamo preliminarmente un risultato dovuto a M. Gromov (si veda, ad esempio, [C], p. 276): sia $\mu \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $\mu \geq 0$; consideriamo le applicazioni $u_j : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definite da

$$u_j(x) = \int_{\mathbb{R}} dr_j \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, \dots, x_{j-1}, r_j, \dots, r_n) dr_{j+1} \dots dr_n$$

per $j = 1, \dots, n$ e, se $Q = [0,1]^n$ denota il cubo unitario di $\mathbb{R}^n$, la funzione $Y_\mu = (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{R}^n \to Q$ definita da

$$y_j(x) = \frac{1}{u_j(x)} \int_{-\infty}^{x_j} dr_j \int_{\mathbb{R}^{n-j}} \mu(x_1, \dots, x_{j-1}, r_j, \dots, r_n) dr_{j+1} \dots dr_n.$$

Allora

$$(1) \qquad \frac{\partial y_j}{\partial x_j} = \frac{u_{j+1}}{u_j},$$

che implica

$$J_{Y_\mu}(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial y_j}{\partial x_j}(x) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x) dx \right\}^{-1} \mu(x).$$

Notiamo ora che l'ipotesi di regolarità su μ può essere lasciata cadere; in particolare, se indichiamo con Φ la funzione Y_μ costruita prendendo come μ la funzione caratteristica della sfera euclidea $\mathbb{B}$ di $\mathbb{R}^n$, Φ risulta ancora di classe C^1 e (1) continua a valere quando $|x| < 1$ e quando $|x| > 1$. È facile vedere che $\Phi : \to Q$ è un diffeomorfismo, e che $J_\phi = \omega_n^{-1}$. Se ora $\mu \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, poniamo

$$Z = Z_\mu = \Phi^{-1} \circ Y_\mu.$$

Sia ora $f \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, e poniamo

$$\mu(x) = f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod \tilde{\lambda}_j \right)^{1/(n-1)},$$

dove $\tilde{\lambda}_j$ è un'approssimazione C^1 e strettamente positiva di λ_j che conserva la proprietà (*). Ad esempio, ciò può essere ottenuto approssimando con gli usuali mollificatori di Friedrichs la funzione $\lambda_j + \varepsilon$. Con questa scela di μ si ha allora

$$J_Z = \omega_n f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod \tilde{\lambda}_j \right)^{1/(n-1)} \left\{ \int f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod \tilde{\lambda}_j \right)^{1/(n-1)} dx \right\}^{-1}$$

e quindi

$$\int f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right)^{1/(n-1)} dx = \omega_n^{-1/n} \int f(x)\mu^{1/n} \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right)^{1/n} dx$$
$$\leq \omega_n^{-1/n} \left(\int f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right)^{1/(n-1)} dx\right)^{1/n} \int f(x) \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right)^{1/n} J_Z^{1/n} dx.$$

Quindi

$$I = \left(\int f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right)^{1/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n}$$
$$\leq \int f(x) \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right)^{1/n} J_Z^{1/n} dx.$$

Osserviamo ora che le matrici jacobiane di Y e di Φ sono nulle sopra la diagonale, e quindi lo stesso accade per le matrici jacobiane di Φ^{-1} e di Z. Dunque

$$J_Z \cdot \left(\prod \tilde{\lambda}_j\right) = \prod_j \tilde{\lambda}_j \frac{\partial Z_j}{\partial x_j}.$$

Notiamo ancora che i termini diagonale della matrice jacobiana di Y sono non negativi, e quelli della matrice jacobiana di Φ sono positivi; quindi i termini sulla diagonale della matrice jacobiana di Z sono nonnegativi. Possiamo allora applicare la disuguaglianza che lega media aritmetica e media geometrica per concludere che

$$\prod_j \tilde{\lambda}_j \frac{\partial Z_j}{\partial x_j} \leq \left(\frac{\sum_j \tilde{\lambda}_j \frac{\partial Z_j}{\partial x_j}}{n}\right)^n,$$

così che, se poniamo $\tilde{\lambda} Z = (\tilde{\lambda}_1 Z_1, \ldots \tilde{\lambda}_n Z_n)$, abbiamo per (*)

$$I \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int f(x) \sum_j \tilde{\lambda}_j \frac{\partial Z_j}{\partial x_j} dx = \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int f(x) \mathrm{div}\,(\tilde{\lambda} Z) dx$$
$$= \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int \sum_j \partial_j f \tilde{\lambda}_j Z_j dx \qquad \text{(per il teorema della divergenza)}$$
$$\leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int \left(\sum_j \tilde{\lambda}_j^2 |\partial_j f|^2\right)^{1/2} dx.$$

A questo punto un argomento di approssimazione per f e un passio al limite permette di concludere il risultato seguente:

Teorema 1. *Sia f una funzione lipschitziana a supporto compatto in $\mathbb{R}^n$. Allora*

$$\left(\int f(x)^{n/(n-1)} \left(\prod_j \lambda_j\right)^{1/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int \left(\sum_j \lambda_j^2 |\partial_j f|^2\right)^{1/2} dx.$$

Approssimando poi la funzione caratteristica di un aperto limitato con bordo sufficientemente regolare con funzioni lipschitziane, come in [FGaW] e [FLW1] si può provare la sequente disuguaglianza isoperimetrica.

Teorema 2. *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e connesso che giace localmente da una sola parte del suo bordo $\partial\Omega$ che è una varietà orientabile di classe C^1. Allora*

$$\left(\int_\Omega \left(\prod_j \lambda_j\right)^{1/(n-1)} dx\right)^{(n-1)/n} \leq \frac{1}{n\omega_n^{1/n}} \int_{\partial\Omega} \left(\sum_j \lambda_j^2 \nu_j^2\right)^{1/2} d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ è la normale esterna a Ω.

Ci sono alcuni punti nel Teorema 2 che possono indurre perplessità; infatti, se la misura sul bordo che appare a destra è quella naturale che può essere ritrovata da una definizione intrinseca di perimetro associato a una famiglia di campi vettoriali ([FSSC], [GN]), a sinistra la misura di Lebesgue dx che appare nelle disuguaglianze isoperimetriche per una famiglia di campi vettoriali ([FGaW], [FLW1], [CDG], [GN]) è sostituita dalla misura $(\prod \lambda_j)^{1/(n-1)}\, dx$. Ma soprattutto l'esponente 'euclideo' $n/(n-1)$ cui è elevata la misura contraddice esplicitamente una filosofia generale secondo la quale la vera dimensione dello spazio metrico dato da $\mathbb{R}^n$ con la distanza di Carnot–Carathéodory associata ai campi vettoriali $\lambda_1\partial_1, \ldots, \lambda_n\partial_n$ è molto più grande della sua dimensione come varietà e dipende sostanzialmente dall'ordine di annullamento delle funzioni λ_j. Ora, per spiegare questa forma insolita di disuguaglianza isoperimetrica, ricordiamo il concetto di *coppia di compensazione* introdotto in [FW1]. Data una famiglia di campi vettoriali lipschitziani e la relativa metrica di Carnot–Carathéodory, una coppia di compensazione (μ, s) per la metrica è costituita da una funzione peso μ che definisce una nuova misura μdx rispetto alla quale la dimensione locale dello spazio è costante ed uguale a s', l'indice coniugato di s. Ovviamente il problema è banale se l'algebra di Lie è stratificata (in questo caso basta prendere $\mu \equiv 1$), ma tipicamente non lo è nella situazione che stiamo considerando.

Diamo una definizione precisa:

Definizione. *Sia $\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ una funzione non negativa, e sia $s > 1$ un numero reale. Diremo che (μ, s) è una coppia di compensazione se esistono delle costanti $c, C > 0$ tali che*

$$c\left(\frac{|B|}{\delta}\right)^s \leq \int_B \mu(y)dy \leq C\left(\frac{|B|}{\delta}\right)^s$$

per ogni sfera metrica $B = B(x, \delta), \delta < \delta_o$.

Ora, se esiste una coppia di compensazione, segue dalle disuguaglianze isoperimetriche pesate di [FLW1] che vale come si diceva una disuguaglia isoperimetrica relativa con dimensione costante. Si ha infatti

Teorema 3. *Sia E un aperto connesso e limitato di $\mathbb{R}^n$ la cui frontiera ∂E è una varietà orientabile di classe C^1 tale che E giace localmente da una sola parte di ∂E, e sia n la normale esterna a ∂E. Se esiste una coppia di compensazione (μ, s), allora per ogni sfera metrica B*

$$\min\{\int_{B\cap E} \mu(y)dy, \int_{B\setminus E} \mu(y)dy\}^{1/s} \leq c \int_{\partial E\cap B} \left(\sum_j \langle X_j, \nu\rangle^2\right)^{1/2} d\mathcal{H}^{n-1}$$

con c independente da E e B.

La Proposizione 5 di [FW1] prova che, se per il momento supponiamo che $\lambda_j = |\mu_j|$ per $j = 1, \ldots, n$ dove i campi vettoriali $\mu_1\partial_1, \ldots, \mu_n\partial_n$ sono C^∞ e soddisfano l'ipotesi di Hörmander, allora esiste una coppia di compensazione. Inoltre la dimensione è $s' = n$ e la misura associata è precisamente $(\prod \lambda_j)^{1/(n-1)}$. Si ha:

Proposizione 4. *Supponiamo che i campi vettoriali $X_j = \mu_j(x)\partial_j, j = 1, \ldots, n$ soddisfino l'ipotesi di Hörmander. Allora $\left(\Pi_j|\mu_j(x)|^{1/(n-1)}, n/(n-1)\right)$ è una coppia di compensazione. Inoltre, $|\mu_j| \in RH_\infty$ per $j = 1, \ldots, n$, cioè per ogni sfera metrica B risulta*

$$(RH_\infty) \qquad \operatorname*{ess\,sup}_B |\mu_j| \sim \fint_B |\mu_j| dy$$

per $j = 1, \ldots, n$.

Dunque la misura che appare a sinistra nella disuguaglianza isoperimetrica del Teorema 2 è precisamente quella che ci dobbiamo attendere per avere disuguaglianze isoperimetriche ottimali perchè uniformi.

Ci si può chiedere a questo punto se $\left((\prod \lambda_j)^{1/(n-1)}, n/(n-1)\right)$ sia una coppia di compensazione in generale per campi vettoriali lipschitziani. Dobbiamo inoltre chiederci se si possano dedurre dai Teoremi 1 e 2 disuguaglianze tipo Sobolev-Poincaré per la misura di Lebesgue, applicabili ad esempio a problemi di regolarità per equazioni ellittiche degeneri. Una prima risposta viene dal fatto (osservato in [FW1]) che l'ipotesi C^∞ e la condizione di Hörmander nella Proposizione 4 sono utilizzati unicamente per provare la condizione RH_∞, da cui segue che $\left((\prod \lambda_j)^{1/(n-1)}, n/(n-1)\right)$ è una coppia di compensazione. Più esplicitamente:

Proposizione 5. *Supponiamo che $\lambda_j \in RH_\infty$ per $j = 1, \ldots, n$. Allora*

$$\left(\Pi_j|\mu_j(x)|^{1/(n-1)}, n/(n-1)\right)$$

è una coppia di compensazione.

D'ora in poi facciamo quindi l'ipotesi seguente (automaticamente soddisfatta da campi C^∞ che soddisfano l'ipotesi di Hörmander):

$$(**) \qquad \lambda_j \in RH_\infty \text{ per } j = 1, \ldots, n$$

Poichè $RH_\infty \subset A_\infty$, esiste $c > 0$ tale che

$$\int_{B(x,2r)} \lambda_j(y)dy \leq c \int_{B(x,r)} \lambda_j(y)dy,$$

e quindi

$$\sup_{B(x,2r)} \lambda_j \leq c \sup_{B(x,r)} \lambda_j(y).$$

Seguendo [F], poniamo per $j = 1, \dots, n$

$$c_j(x,r) = \{u_j(t) : 0 \le t \le r, \text{ dove } u = (u_1, \dots, u_n) \\ \text{è una curva sub-unitaria tale che } u(0) = x\}.$$

Poniamo allora

$$\Lambda_k(x,r) = \sup\{\lambda_k(s) : s \in \Pi_{j=1}^n c_j(x,r)\}$$

e

$$Q(x,r) = \Pi_{k=1}^n (x_k - r\Lambda_k(x,r), x_k + r\Lambda_k(x,r)).$$

Segue da [F], Teorema 2.3, che esiste $b > 1$ tale che

$$Q(x, r/b) \subset B(x,r) \subset Q(x,r)$$

per ogni $r < r_0$.

È facile provare che

$$B(x,r) \subset \Pi_j c_j(x,r) \subset B(x, 2br)$$

e che

$$\Lambda_j(x, 2r) \le c\Lambda_j(x,r),$$

da cui segue la proprietà di duplicazione fondamentale

$$|B(x,2r)| \le |B(x,r)| \qquad \text{per} \quad r < r_0.$$

Ripetendo allora gli argomenti della Proposizione 5 di [FW1] otteniamo che

$$c\Lambda_j(x,r) \le \sup_{B(x,r)} \lambda_j \le \Lambda_j(x,r)$$

per $j = 1, \dots, n$ e $r < r_0$.

Ricordiamo ora che è provato in [FGuW], Proposizione 2.3 che

i) se $w \in RH_\infty$ e $u \in A_\infty$, allora $uw \in A_\infty$;

ii) se $w \in RH_\infty$, allora $w^\beta \in RH_\infty$ per ogni $\beta > 0$.

Così $(\prod \lambda_j)^{1/(n-1)} \in A_\infty$. Inoltre si ha il risultato seguente:

Proposizione 6. *Sia $B = B(x,r)$ una sfera metrica. Risulta*

$$\int_B \left(\prod \lambda_j\right)^{1/(n-1)} dy \approx \left(\frac{|B|}{r}\right)^{n/(n-1)}.$$

U. na stima è immediata; proviamo la seconda. Si ha:

$$(\int_B \left(\prod \lambda_j\right)^{1/(n-1)} dy \\ = \int_B |\lambda_1 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} dy = \int_B |\lambda_1|^{1/(n-1)} |\lambda_2 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} dy,$$

dove $|\lambda_1|^{1/(n-1)} \in RH_\infty$ e $|\lambda_2 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} \in A_\infty$, e quindi $|\lambda_2 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} \in A_p$ per qualche $p \geq 1$. Allora

$$\begin{aligned}
&\int_B |\lambda_1|^{1/(n-1)} |\lambda_2 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} dy \\
&\geq c \left(\fint_B |\lambda_1|^{1/p(n-1)} dy \right)^p \int_B |\lambda_2 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} dy \\
&\geq c(\sup_B |\lambda_1|)^{1/(n-1)} \int_B |\lambda_2 \cdots \lambda_n|^{1/(n-1)} dy \\
&\geq c(\sup_B |\lambda_1| \cdots \sup_B |\lambda_n|)^{1/(n-1)} |B| \text{ iterando lo stesso argomento} \\
&\geq c \left(\frac{|B|}{r} \right)^{n/(n-1)} .
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, essendo $(\prod \lambda_j)^{1/(n-1)} \in A_\infty$, possiamo sostuire alle sfere B i cubi metrici; d'altra parte è immediato verificare che la misura superficiale intrinseca del bordo del cubo metrico $Q(x,r)$ è equivalente a $|Q(x,r)|/r$, e quindi che i cubi metrici sono 'quasi ottimali' per la disuguaglianza isoperimetrica, cioè che

Proposizione 7. *Sia $Q = Q(x,r)$ un cubo metrico. Allora*

$$\left(\int_Q \left(\prod_j \lambda_j \right)^{1/(n-1)} dx \right)^{(n-1)/n} \approx \frac{1}{\omega_n^{1/n}} \int_{\partial Q} \left(\sum_j \lambda_j^2 \nu_j^2 \right)^{1/2} d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ è la normale esterna a Q.

Bibliografia

[C] I. Chavel, *Riemannian Geometry.*

[CDG] Capogna, L., Danielli, D., Garofalo N., *An isoperimetric inequality and the geometric Sobolev embedding for vector fields*, Comm. in Analysis and Geometry **2(2)** (1994), 203-215.

[F] B. Franchi, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities and pointwise estimates for a class of degenerate elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 125–158.

[FGaW] Franchi, B., Gallot S., Wheeden, R.L., *Sobolev and isoperimetric inequalities for degenerate metrics*, Math. Ann. **300** (1994), 557–571.

[FGuW] B. Franchi, C. Gutierrez and R.L. Wheeden, *Weighted Sobolev-Poincaré inequalities for Grushin type operators*, Comm. Partial Differential Equations **19** (1994), 523–604.

[FLW1] Franchi, B., Lu, G., Wheeden, R. L., *A relationship between Poincaré type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type jour Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **45** (1995), 577-604.

[FLW2] Franchi, B., Lu, G., Wheeden, R. L., *Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields jour Int. Mat. Res. Notices* (1996), 1–14.

[FSSC] Franchi, B., Serapioni R., Serra Cassano, F, *Meyers–Serrin type theorems and relaxation of variational integrals depending on vector fields*, Houston Math. J. **22** (1996), 859–889.

[FW1] Franchi, B., Wheeden, R.L. (to appear).

[FW2] Franchi, B., Wheeden, R.L., *Some remarks about Poincaré type inequalities and representation formulas in metric spaces of homogeneous type* (to appear).

[GN] Garofalo, N., Nhieu, D. M., *Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces*, Comm. Pure Appl. Math. **49** (1996), 1081–1144.